元利均等返済の計算方法　　　　元本均等返済も参考として記述

銀行などから借入しようとすると、
・ 元利均等返済と元金均等返済があり、次のような両方の差異が知りたくなる。
・ 更に、返済完了までの総支払金額、元本の返済の経過（ある期間経過した後元本がどれだけ返済されているか）、
・ それらは金利によって変わってくるので金利との関係、
などが知りたくなってくる。これを知らずに借入もしたくない。

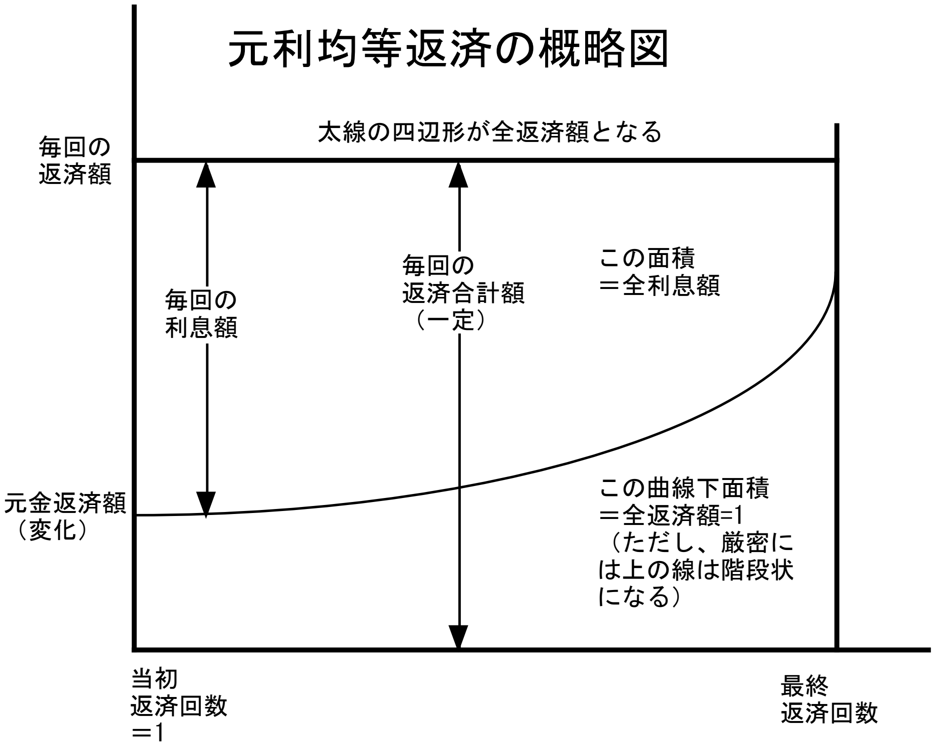
返済の実際では「利息の先取りと後取り」というものがあり、値は微妙に違ってくる。さらに、１年というものには閏年ありやなし、月の日数も一定ではない。しかし、おおまかに把握しようとするならば、年や月の日数は一定値、利息の前取りや後取りを無視して考えることができる。一般の人が使うのは計画などでおおまかな把握ができればよいのだから、これで十分に事足りる。

結論から言えば、
・ 金利が 1%や 2%程度の低金利なら、どちらでも大差ない。
・ 元利均等返済の場合は、例えば、返済期間が長く 30 年、金利も高く 7%などとなると、返済の期間が 2/3 も経過しているにもかかわらず、元本は 1/3 しか返済されていないような事が起こりえる。
・ こんな時に、残存期間で大幅な金利上昇でもあろうものなら、1/3 の期間で元本を 2/3 返済などの事態になり大変なことになる。
というようなことになる。
　ある都銀の銀行員に「元利均等返済で金利が変わったときに、どう計算し直すのか」とからかったところ、数ヶ月後「専門部署でもわからない」と返事が返ってきた。恐らく恥ずかしくて社内で聞けなかったのだろう。答は「残高と残存期間で計算し直す」なのは当然なのだが、通常の銀行員とはこの程度なのかと思ったものである。

　こんなことで、多少苦しくとも融資先が許せば、私は原則として、
(1)元金均等返済で借り入れる。
(2)返済が進んで、余裕が出てくれば、途中で元本も返してしまう。
と言う作戦で臨んでいる。

《式の誘導》

元利均等返済で、返済額R_x　利息I_x　金利α　返済回数 n　ただし、x は x 回目の返済とする。借入金額は 1 としておく。と言うことで、返済の年数（月数）や金利が年なのか月なのかなどは意識しないで進むことにする。意識しないでよいのは後でわかる。



下記のような式が成り立つ。即ち、前の回までの返済額が差し引かれて、以降の金利になると言う式である。

R_x を x 回目の元本返済額、I_x を x 回目の支払い利息額とすると、下記のような漸化式ができる。よく式を見れば、初回の返済で利息が加わっているので、厳密には利息前払いと言える。

$$\begin{cases} R_1 \quad I_1 = (1 - R_1)\alpha \\ R_1 \quad I_1 = (1 - R_1 - R_2)\alpha \\ . \\ R_{x-1} \quad I_{x-1} = (1 - R_1 - R_2 \cdots\cdots - R_{x-1})\alpha \qquad \cdots (1) \\ R_x \quad I_x = (1 - R_1 - R_2 \cdots\cdots - R_x)\alpha \\ . \\ R_n \quad I_n = (1 - R_1 - R_2 \cdots\cdots - R_n)\alpha \end{cases}$$

x は、途中までの元本の返済額を知りたいために設定しているものである。

元利均等返済では毎月の返済額が一定である。上式を眺めてみれば、

$$R_x + I_x = R_{x-1} + I_{x-1} = const.$$

$$R_x + (1 - R_1 - R_2 \cdots\cdots - R_x)\alpha = R_{x-1} + (1 - R_1 - R_2 \cdots\cdots - R_{x-1})\alpha$$

$$R_x - R_x\alpha = R_{x-1} \quad R_x(1-\alpha) = R_{x-1} \qquad \cdots (2)$$

のように、前の返済と次の返済間の式の関連がわかる。

ここまでは、式を考えはじめたが直感的にはわからず何となく漸化式を並べはじめたら、直ちにわかったものである。後は機械的なものである。

　この結果を下記のように並べてみる。

$$\begin{cases} R_n(1-\alpha)=R_{n-1} \\ R_{n-1}(1-\alpha)=R_{n-2} \\ . \\ . \\ R_3(1-\alpha)=R_2 \\ R_2(1-\alpha)=R_1 \end{cases} \qquad \cdots(3)$$

上の(3)の一連の式を眺めてみると、辺々の全体の積をとると解に導けることがわかる。

$$R_n(1-\alpha)^{n-1}=R_1 \qquad R_n=\frac{R_1}{(1-\alpha)^{n-1}} \qquad \cdots(4)$$

即ち元本返済は指数的に増加して行くことを示している。
R1 を知りたいのだが、下記のように求めることができる。

$\sum_{x=1}^{n} R_x=1$ であるから（元金の全返済額） $R_1\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(1-\alpha)^{x-1}}=1 \qquad \cdots(5)$

となる。ここから初回の元本返済額が求まる。

$$R_1=\frac{1}{\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{(1-\alpha)^{x-1}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{(1-\alpha)}+\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\cdots+\frac{1}{(1-\alpha)^{n-1}}}=\frac{1}{\frac{1-\frac{1}{(1-\alpha)^n}}{1-\frac{1}{1-\alpha}}}=\frac{1}{\frac{\frac{(1-\alpha)^n-1}{(1-\alpha)^n}}{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}}$$

$$=\frac{1}{\frac{(1-\alpha)\{(1-\alpha)^n-1\}}{-\alpha(1-\alpha)^n}}=\frac{-\alpha(1-\alpha)^n}{(1-\alpha)\{(1-\alpha)^n-1\}}=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\{1-(1-\alpha)^n\}} \qquad \cdots(6)$$

《参考》等比級数 B は、こんな計算ができる。

$$B=1+p+\cdots+p^{n-2}+p^{n-1}$$

$$pB=p+\cdots+p^{n-2}+p^{n-1}+p^n \to 1+pB=\left(1+p+\cdots+p^{n-2}+p^{n-1}\right)+p^n$$

$$1+pB=B+p^n \qquad B=\frac{1-p^n}{1-p}$$

p は 1 でなければよい。

この結果から、$R_x=\frac{\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\{1-(1-\alpha)^n\}}}{(1-\alpha)^{x-1}}=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{(1-\alpha)^{x-1}\{1-(1-\alpha)^n\}}=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-x}}{\{1-(1-\alpha)^n\}} \qquad \cdots(7)$

さて I の方である。R がわかったので(1)の第 1 行を利用して、

$$I_1=(1-R_1)\alpha=\left(1-\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\right)\alpha=\alpha\frac{\left\{1-(1-\alpha)^n-\alpha(1-\alpha)^{n-1}\right\}}{1-(1-\alpha)^n}$$

$$=\alpha\frac{\left\{1-(1-\alpha)(1-\alpha)^{n-1}-\alpha(1-\alpha)^{n-1}\right\}}{1-(1-\alpha)^n}=\alpha\frac{\left\{1-(1-\alpha)^{n-1}\right\}}{1-(1-\alpha)^n}\qquad\cdots(8)$$

$$R_1+I_1=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}+\alpha\frac{\left\{1-(1-\alpha)^{n-1}\right\}}{1-(1-\alpha)^n}=\alpha\frac{\left\{(1-\alpha)^{n-1}+1-(1-\alpha)^{n-1}\right\}}{1-(1-\alpha)^n}=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^n}\qquad\cdots(9)$$

$$=R_x+I_x$$

となり（9）は毎回の元利合わせた返済額となる。

(9)がわかれば、x 回目のR_x, I_xであるが、下記となる。

$$R_x=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-x}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}$$

$$I_x=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)^n}-\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-x}}{1-(1-\alpha)^n}=\frac{\alpha-\alpha(1-\alpha)^{n-x}}{1-(1-\alpha)^n}=\frac{\alpha\left\{1-(1-\alpha)^{n-x}\right\}}{1-(1-\alpha)^n}\qquad\cdots(10)$$

全期間の返済額は元利均等だから、これは簡単で n 倍すれば良く、下記のようになる。

$$\sum_{x=1}^{n}(R_x+I_x)=\frac{n\alpha}{1-(1-\alpha)^n}=\sum_{x=1}^{n}R_x(=1)+\sum_{x=1}^{n}I_x=1+\sum_{x=1}^{n}I_x\qquad\cdots(11)$$

$$\therefore\sum_{x=1}^{n}I_x=1-\frac{n\alpha}{1-(1-\alpha)^n}\qquad\cdots(12)$$

のようになる。

気になる「ある時期 x 回までの元本返済額」であるが、

$$R_x=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-x}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\qquad\sum_{x=1}^{x}\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-x}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}=\frac{\alpha}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\sum_{x=1}^{x}(1-\alpha)^{n-x}=\frac{\alpha}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\sum_{x=1}^{x}\frac{(1-\alpha)^n}{(1-\alpha)^x}$$

$$=\frac{\alpha(1-\alpha)^n}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\sum_{x=1}^{x}\frac{1}{(1-\alpha)^x}=\frac{\alpha(1-\alpha)^n}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\left\{\frac{1}{(1-\alpha)}+\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\cdots+\frac{1}{(1-\alpha)^x}\right\}$$

$$=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\left\{1+\frac{1}{(1-\alpha)}+\frac{1}{(1-\alpha)^2}+\cdots+\frac{1}{(1-\alpha)^{x-1}}\right\}=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\frac{1-\frac{1}{(1-\alpha)^x}}{1-\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\frac{\frac{1-(1-\alpha)^x}{(1-\alpha)^x}}{\frac{1-(1-\alpha)}{1-\alpha}}=\frac{\alpha(1-\alpha)^{n-1}}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\frac{(1-\alpha)\left\{1-(1-\alpha)^x\right\}}{\alpha(1-\alpha)^x}=\frac{(1-\alpha)^n}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\frac{\left\{1-(1-\alpha)^x\right\}}{(1-\alpha)^x}\qquad\cdots(13)$$

である。

ただ、プログラムやMicrosoft Excelなどで計算の場合には、

$$\frac{(1-\alpha)^n}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}\frac{\left\{1-(1-\alpha)^x\right\}}{(1-\alpha)^x} \quad \cdots(13)$$

の $\frac{(1-\alpha)^n}{\left\{1-(1-\alpha)^n\right\}}$ は n と α に依存した常数であるので予め計算し、$\frac{\left\{1-(1-\alpha)^x\right\}}{(1-\alpha)^x}$ を別途計算し機械的に掛けるのがよいだろう。

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

返済回数は年でも月でも良い。金利も年でも月でも良い。現実の場に即した値を計算する場合は、返済回数は月（12×年)、逆に月金利は年金利を $\alpha/12$ にすればよいだけである。

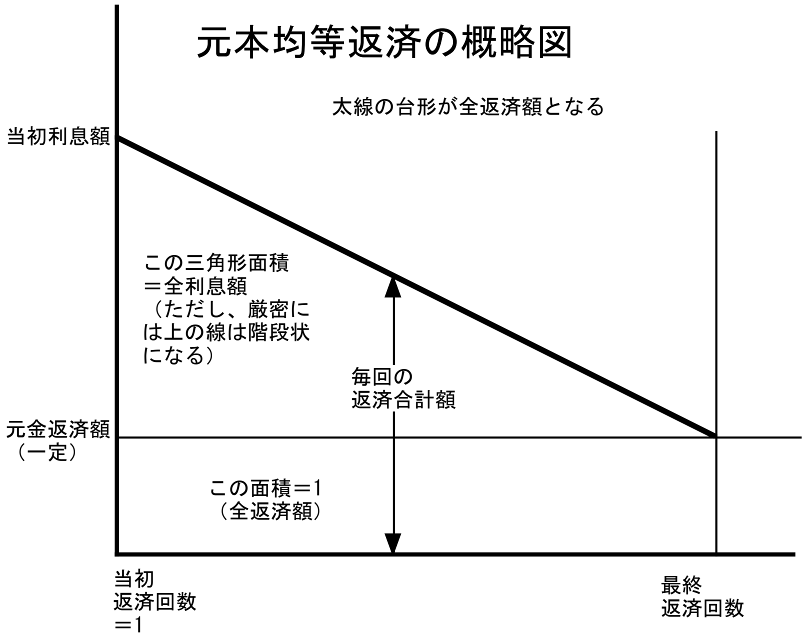
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

経過

- 1980年頃の40歳頃、人生ではじめて大きな借金をしようとした。
- 元本均等返済の延べの支払額は簡単にわかる。しかし、元利均等返済の元本分と利息分は簡単ではない。
- 元利均等返済の値がわからない。本屋に数表でも売っているだろうと調べたが数表はなかった（後で式を考えて当然と思ったのだが)。当時は関数電卓もなかった。Microsoft Excel などの前身も幼稚だった。
- 何とか計算できないものかと２日間考えていたら上の式が誘導できた。
- 式の誘導結果から電卓計算ができるような代物ではないことがわかり、急遽パソコンベーシックのプログラムを勉強し、１週間ほどでプログラムが出来た。プログラムをやったのはこれが最初で最後である。式からプログラム終了までは会社の机で仕事をさぼりながらやっていた。
- 計算は、金利を0.5%毎、期間を5年毎に振りながら計算した。この間は、大きな差は出てこないから按分で推測しても大丈夫だからである。
- 計算結果を見ながら、銀行支店長と借入の打ち合わせしていると「何を見ている？」と言うので、見せると「欲しい」と言われてコピーして渡した。支店長など代わるから誰だかすっかり忘れていた。
- その後はMicrosoft Excelの進歩で、この式さえ解っていれば、Microsoft Excel上で構築できるので、プログラムで計算したことはない。
- 20年ほどして、OBになっていたが、その元支店長と再会した。「あの時は参ったな」と言われて「貴方だったの」と笑いながら会話したことがある。当時はコンピュータ部門に依頼すると膨大な計算結果を渡された、とのことだった。銀行も工夫がない。
- それから30年以上した古希過ぎに、一部追加し、この清書を行った。要領が悪い式の誘導かも知れないのだがこれ以上見直す元気はない。

ついでだから**元金均等返済**も示しておこう。

同様に、返済額R　利息I_x　金利α　返済回数ｎ　ただし、ｘはｘ回目の返済とする。借入金額は１としておく。今度は毎回の返済額は一定ではなく徐々に減って行くことをイメージしておこう。



同様に数列から入ろう。$\left(\begin{array}{l} R \quad I_1 = (1-R)\alpha \\ R \quad I_1 = (1-2R)\alpha \\ . \\ . \\ R \quad I_n = (1-nR)\alpha \end{array}\right.$　である。

$nR = 1$

x 回目の返済額は　$\dfrac{x}{n} + \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)\alpha$　である。

前の項は元本返済分、後の項は残高への利息分である。毎回の返済額は、これを計算しなければならない。延べの利息額だけ知っていれば、全体の返済額はわかるので、それだけ示しておこう。

$$\sum_{x=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\alpha = \frac{\alpha}{n}\sum_{x=1}^{n}(n-x) = \frac{\alpha}{n}\left\{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right\} = \frac{\alpha}{n}\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) = \frac{\alpha}{2}(n-1)$$　＝全利息額

全返済額は　$1 + \dfrac{\alpha}{2}(n-1)$　である。